

Вычислительная гидродинамика и  
суперкомпьютерное моделирование  
турбулентных течений

# Вычислительная гидродинамика Computational Fluids Dynamics (CFD)

Гидродинамика

Гидроакустика

Аэродинамика

Аэроакустика

Тепломассоперенос

Прогноз погоды

Динамика мирового океана

Магнитная гидродинамика

Астрофизика

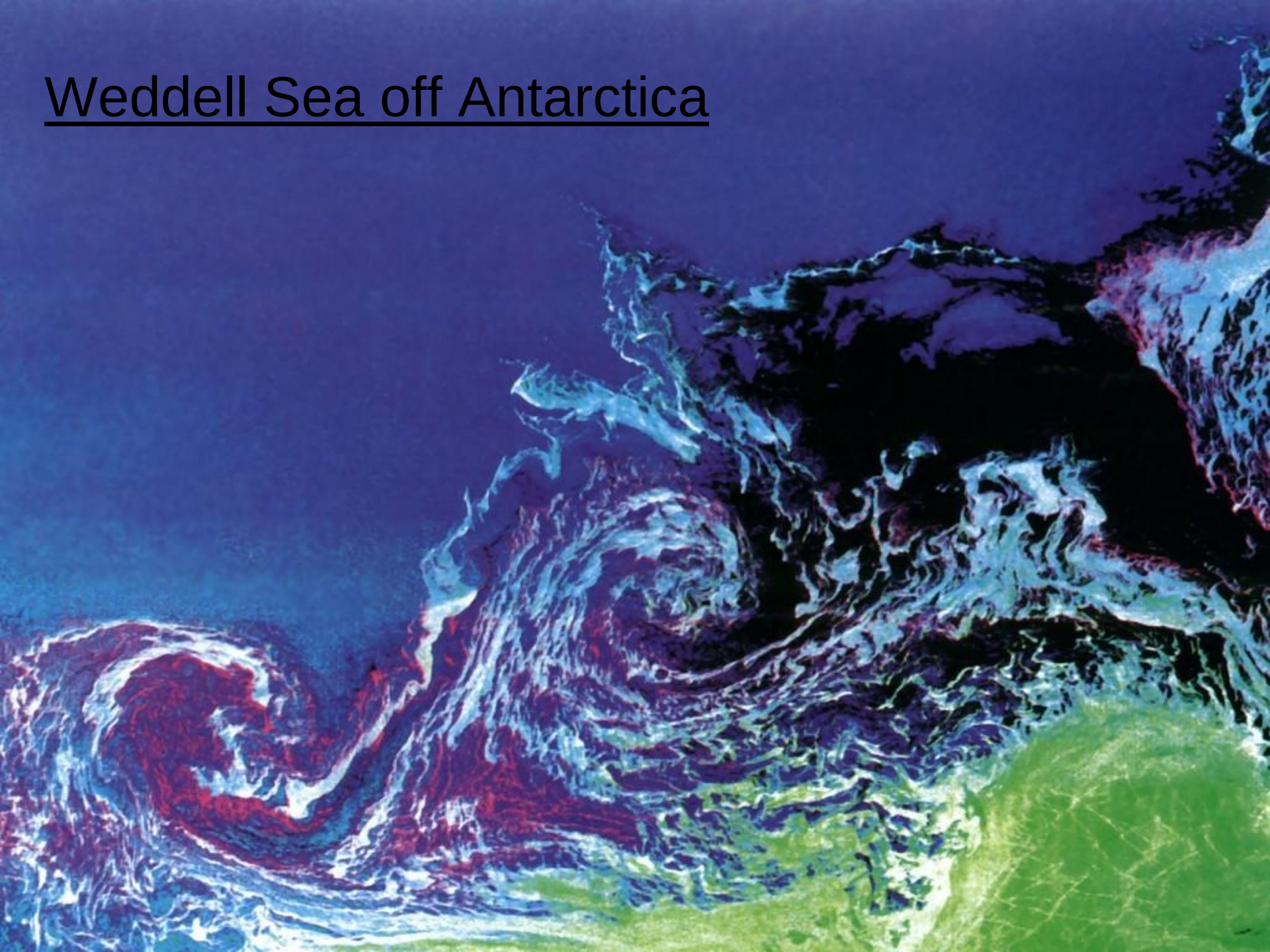
# Что такое турбулентность?

(П.Брэдшоу, 1971) : «Турбулентность – это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения. Она является обычным состоянием движущейся жидкости, за исключением течений при малых числах Рейнольдса».

(Р.Фейнман, 1968) : «Турбулентность – это последняя неразрешенная фундаментальная проблема классической физики»

Фольклор : «Турбулентность похожа на порнографию – ей трудно дать определение, но как только вы ее увидите – тут же узнаете»

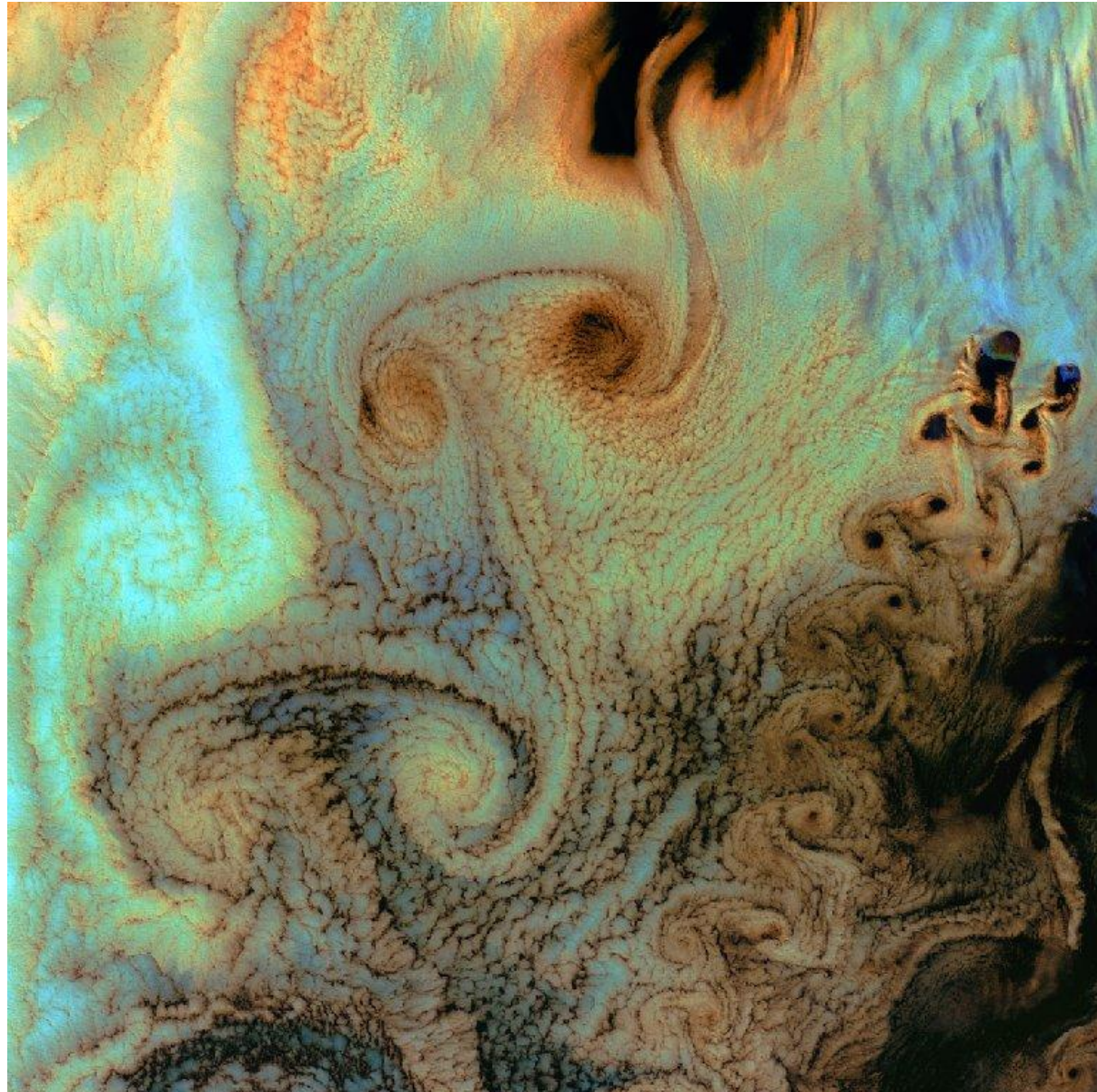
# Weddell Sea off Antarctica



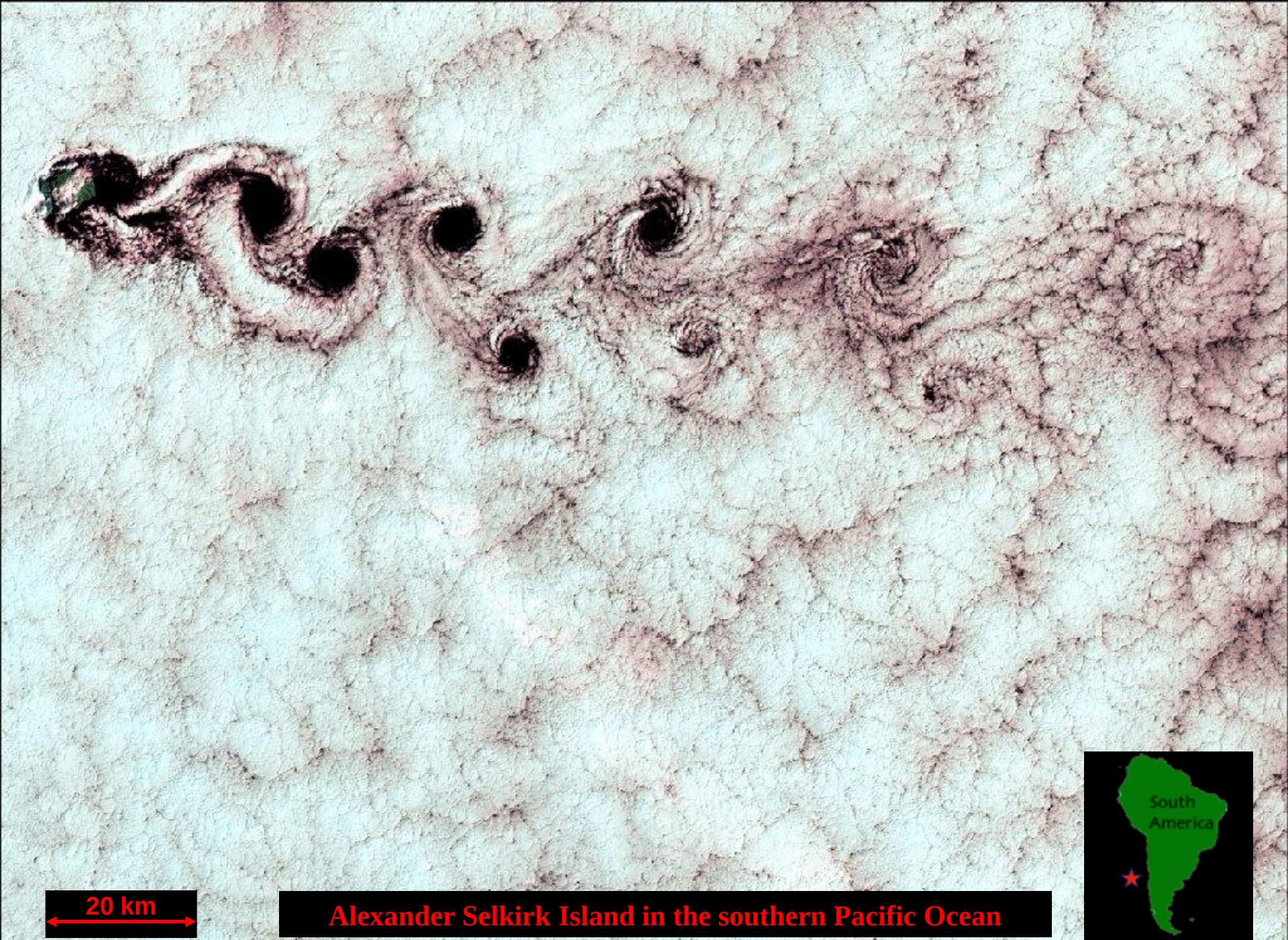


# Alaska's Aleutian Islands

- As air flows over and around objects in its path, spiraling eddies, known as Von Karman vortices, may form.
- The vortices in this image were created when prevailing winds sweeping east across the northern Pacific Ocean encountered Alaska's Aleutian Islands







20 km

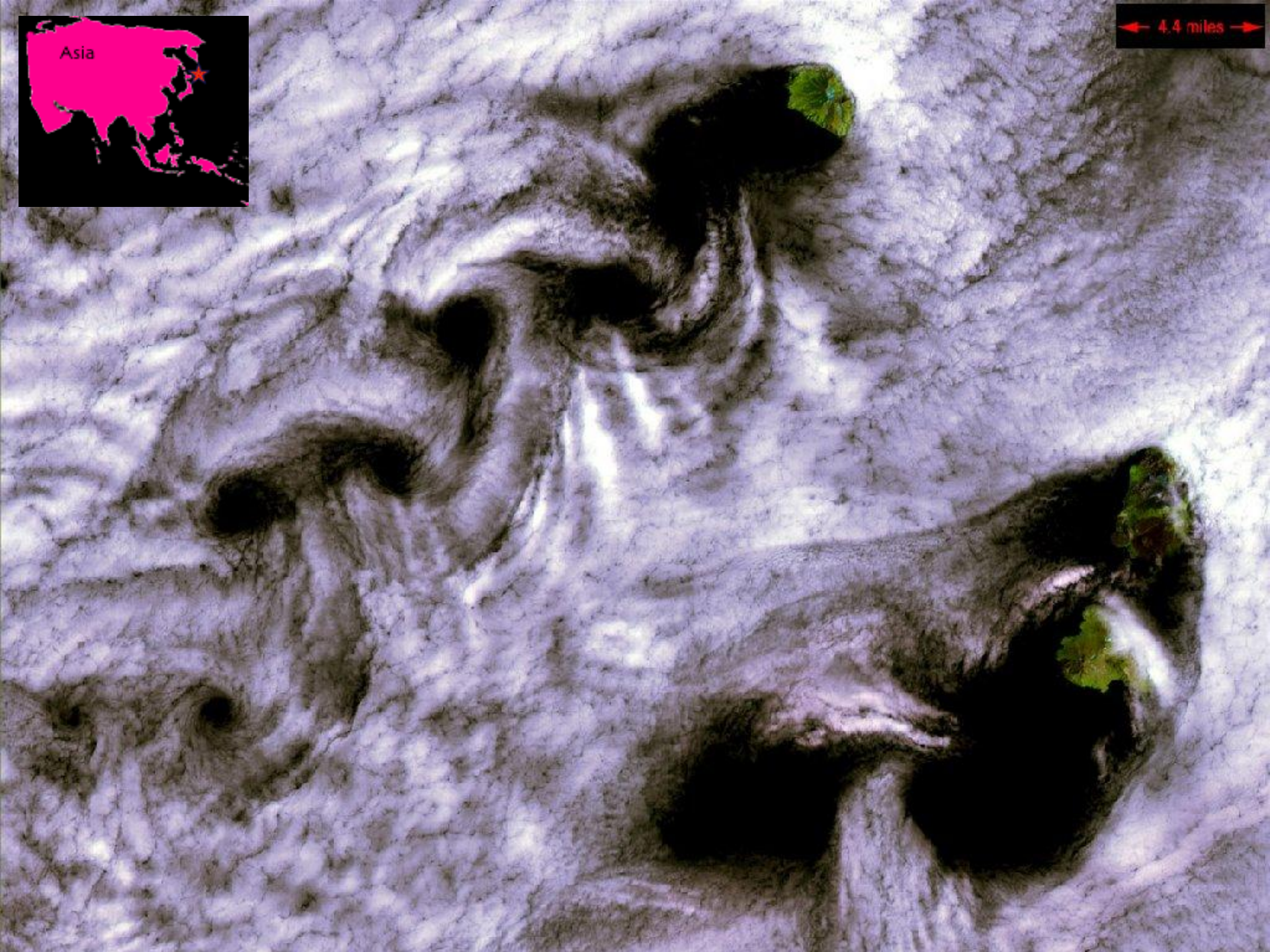
Alexander Selkirk Island in the southern Pacific Ocean







← 4.4 miles →











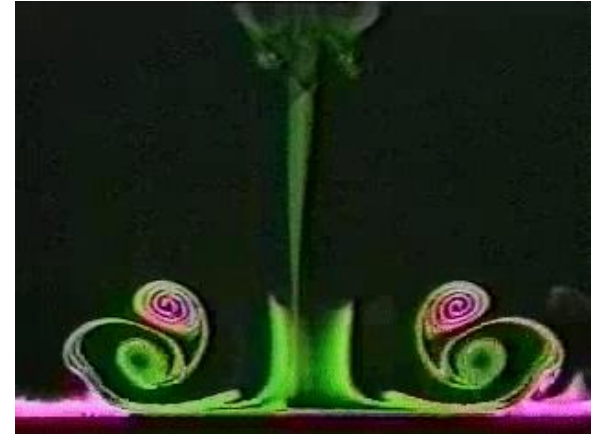
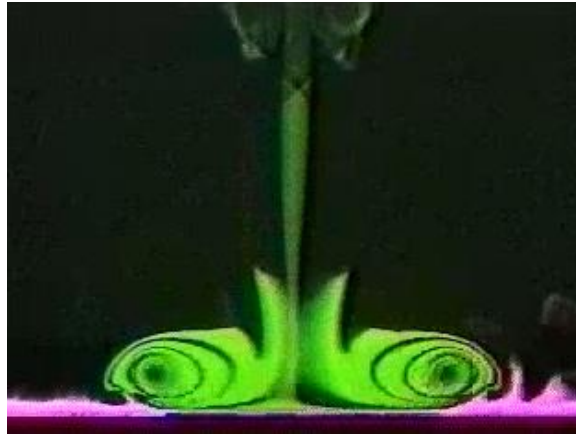
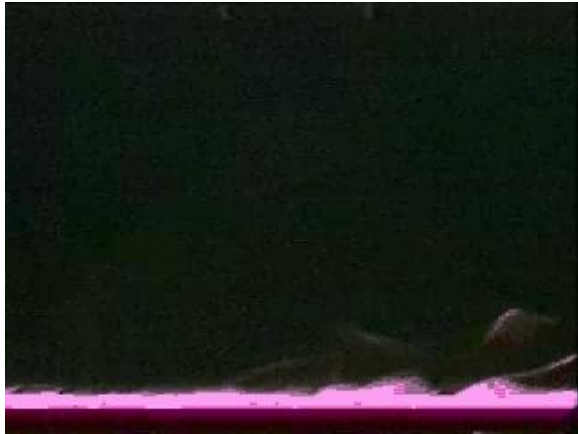
New York Times



NASA



# Smoke ring



A smoke ring (green) impinges on a plate where it interacts with the slow moving smoke in the boundary layer (pink). The vortex ring stretches and new rings form. The size of the vortex structures decreases over time.

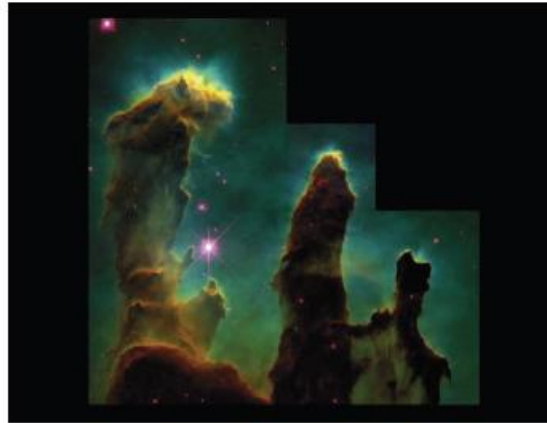


# Turbulent Flows

M100 galaxy,  $L \sim 10^{23}$  m



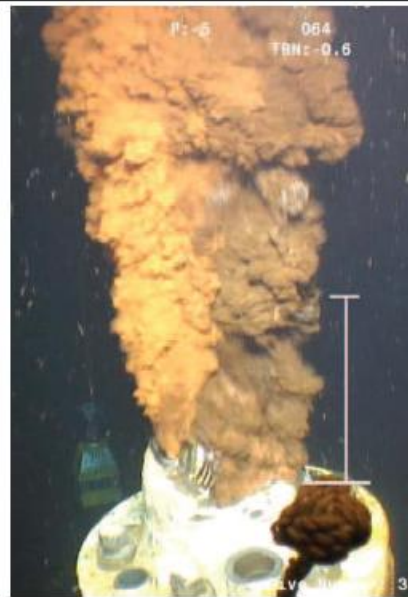
Eagle nebula,  $L \sim 10^{18}$  m



Earth's atmosphere,  $L \sim 10^7$  m



Volcano in Iceland,  $L \sim 10^3$  m



BP oil leak,  $L \sim 10^0$  m



Soap film,  $L \sim 10^{-1}$  m

# Уравнения Навье - Стокса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0;$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i \cdot u_j}{\partial x_j} = \nu \cdot \rho \cdot \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i};$$

Уравнение конвекции-диффузии

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \eta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right);$$

**Неизвестные функции:**  $\rho(\vec{r}, t), u_1(\vec{r}, t), u_2(\vec{r}, t), u_3(\vec{r}, t), p(\vec{r}, t)$

**Уравнение на давление**

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \nu \cdot \Delta u_i - u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right);$$

Уравнение Пуассона

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = f;$$



## Обезразмеренная форма уравнений Навье - Стокса

$$x_i = D \cdot x_i^*; \quad t = t_0 \cdot t^*; \quad \rho = \rho_0 \cdot \rho^*; \quad u_i = u_0 \cdot u_i^*; \quad p = P_0 \cdot p^* \\ u_0 = D/t_0; \quad P_0 = \rho_0 \cdot u_0^2$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + u_i^* \cdot \frac{\partial \rho^*}{\partial x_i^*} = 0; \quad \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0; \\ \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho u_i^* \cdot u_j^*}{\partial x_j^*} = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \rho^* \Delta u_i^* - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*};$$

Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{u_0 \cdot D}{\nu}$$

# Примеры аналитических решений уравнений Навье - Стокса

Течение Куэтта между плоскими пластинами

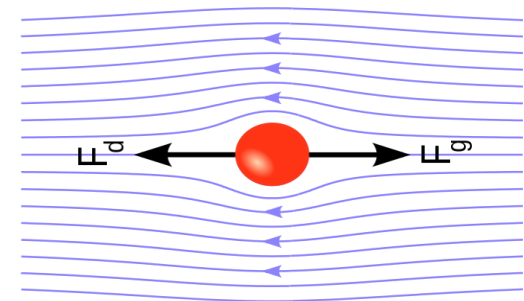
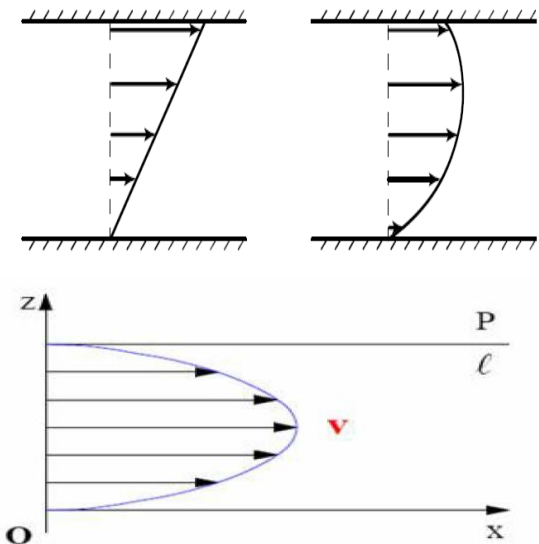
Течение Куэтта между коаксиальными цилиндрами

Течение Пуазейля между плоскими пластинами

Течение Пуазейля между коаксиальными цилиндрами

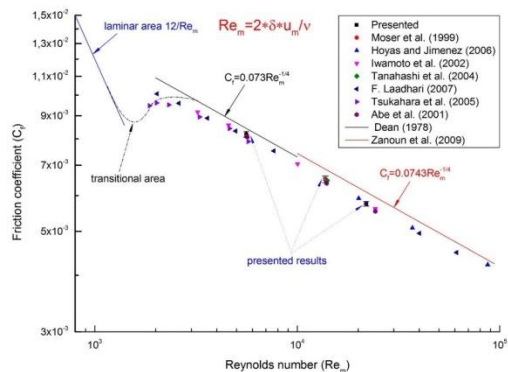
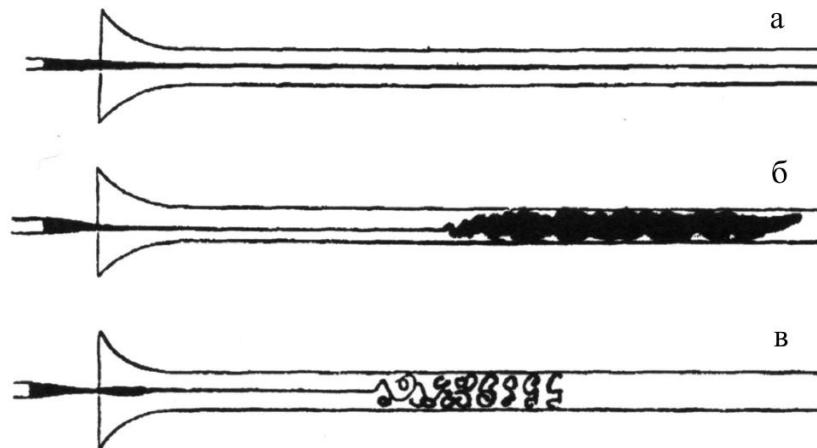
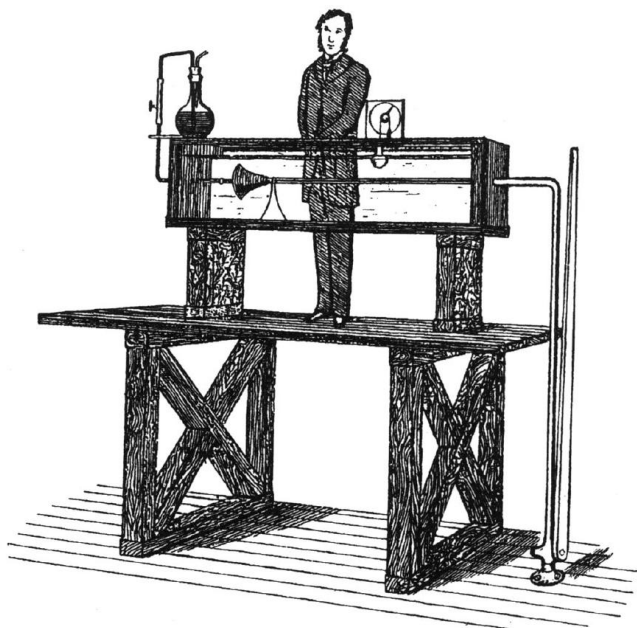
Задача Стокса

$$F = -6\pi \cdot R \cdot \eta \cdot u$$





# Эксперимент Рейнольдса

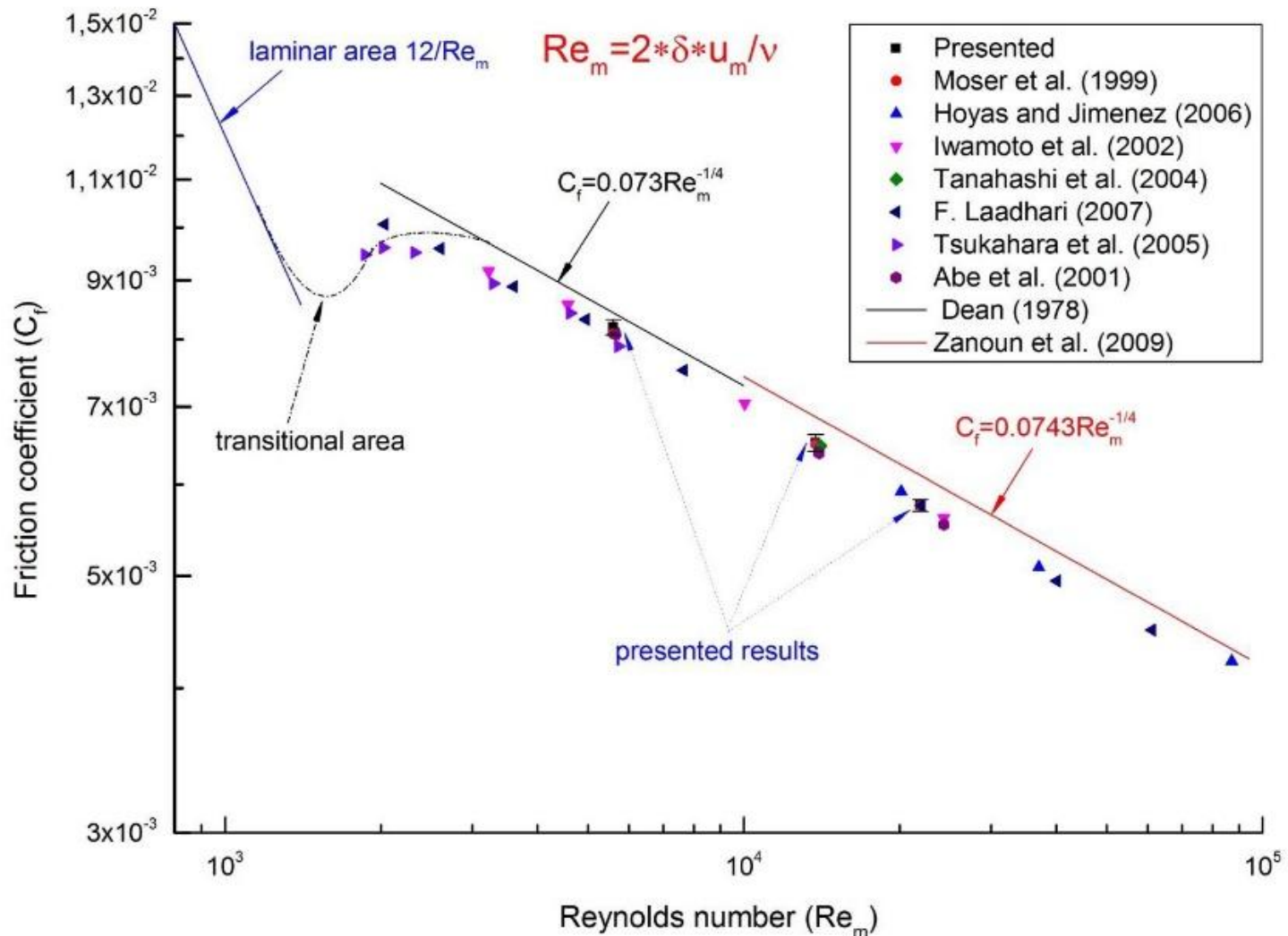


$$\Delta p = \lambda \frac{u^2 \cdot L}{2D} \cdot \rho$$

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \Delta p \propto \bar{u}, Re < 2300$$

$$\lambda = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re}}, \Delta p \propto u^{7/4}, 2300 < Re < 10^5$$

# Коэффициент трения для плоского канала





# Корректность задачи по Адамару

Решение существует.

Решение единственно.

Решение непрерывно зависит от данных в некоторой разумной топологии.

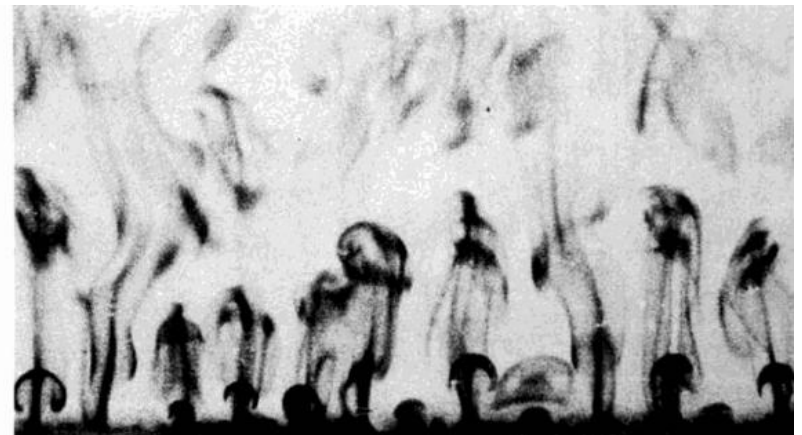
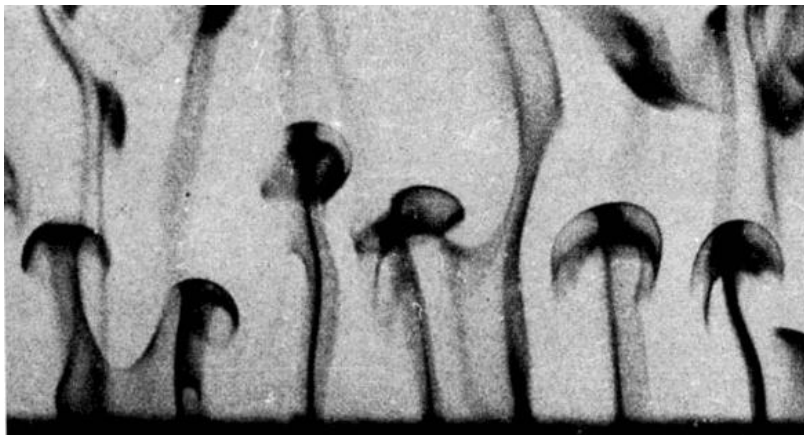
## Гидродинамические неустойчивости



Сдвиговая неустойчивость. Нижний поток движется влево быстрее, чем верхний. Рисунок заимствован из альбома [Ван-Дайк, 1986].



# Конвективная неустойчивость

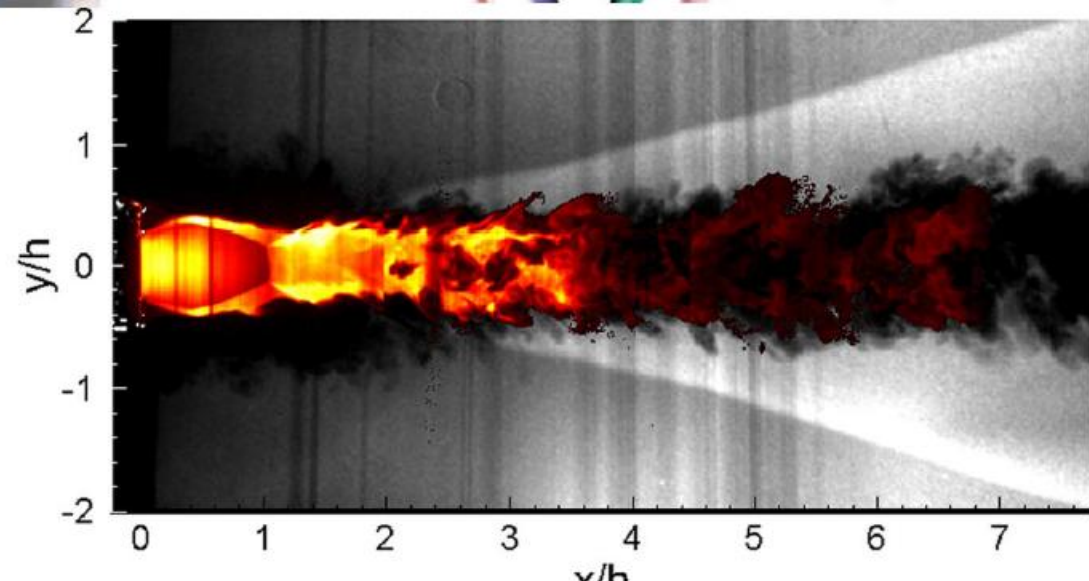


Грибообразные термики, всплывающие от нагретой медной поверхности.  
На правом снимке скорость нагрева выше. Рисунок заимствован из альбома [Ван-Дайк, 1986].

# Переход к турбулентности

• Течение вниз по потоку из ламинарного становится турбулентным

- При этом говорят, что происходит **переход к турбулентности**





# Переход к турбулентности

При рассмотрении перехода можно задаваться разными вопросами:

Почему происходит переход?

Когда и как он происходит (сценарий перехода)?

Как его промоделировать при проведении расчетов?

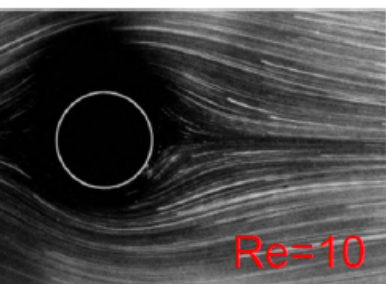
**Первым вопросом** занимается теория динамического хаоса – один из разделов синергетики (науки о самоорганизации)

Неустойчивость – признак того, что такая форма движения не может больше существовать

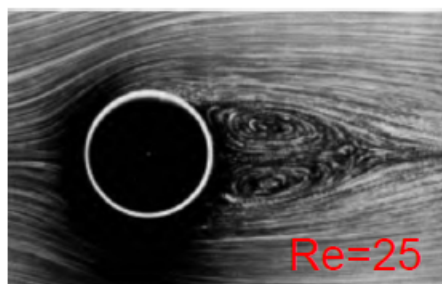
- Должна появиться новая форма движения
- Процесс ветвления решения называется бифуркацией

Такой подход позволяет отвлечься от детального рассмотрения самого процесса перехода

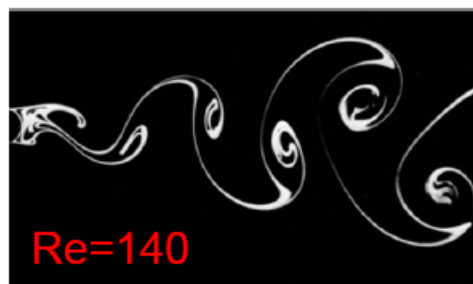
Стационарное  
безотрывное



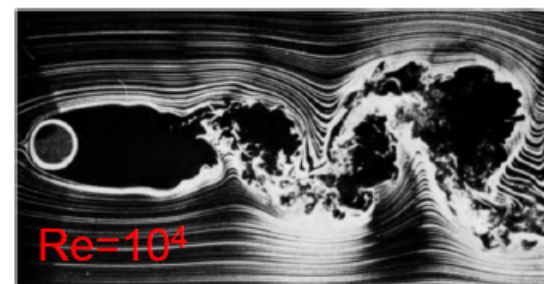
Стационарное  
отрывное



Нестационарное  
упорядоченное



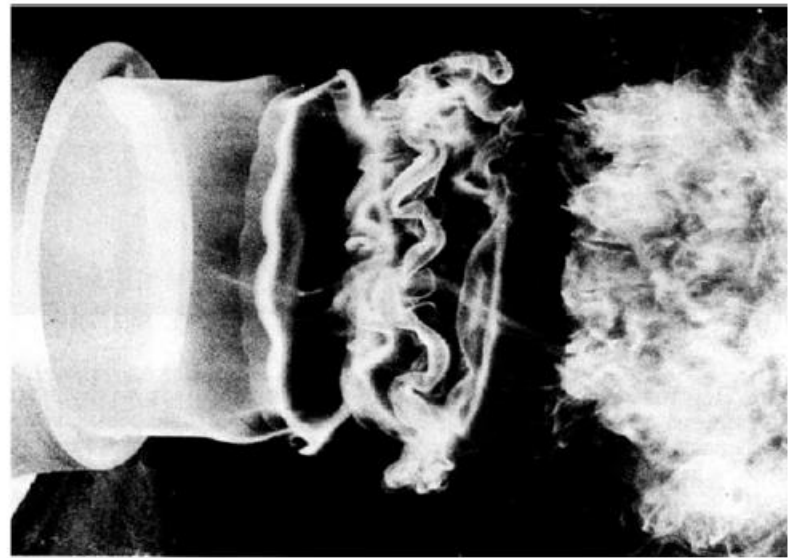
Турбулентное



Изменение структуры течения при увеличении числа Рейнольдса

# Когда происходит переход к турбулентности

При значениях числа Рейнольдса  $Re = UL/\nu$ , превышающих некоторое критическое значение, упорядоченное стационарное движение газов и жидкостей (*ламинарное движение*) теряет устойчивость и становится *турбулентным*



Критические значения чисел Рейнольдса различны для разных течений, но не очень велики, так что подавляющее большинство реальных течений в природе и технике являются турбулентными

# Почему возникает турбулентность?

- Число Рейнольдса характеризует соотношение сил инерции (конвекции) и вязкости в рассматриваемом течении.
- Конвекция дестабилизирует течение, а вязкие силы – стабилизируют.
  - Объемные силы также могут стабилизировать или дестабилизировать течение
    - ✓ Температурная стратификация
    - ✓ Центробежная сила

Увеличение числа Рейнольдса (превышение  $Re_{кр}$ )



Потеря устойчивости



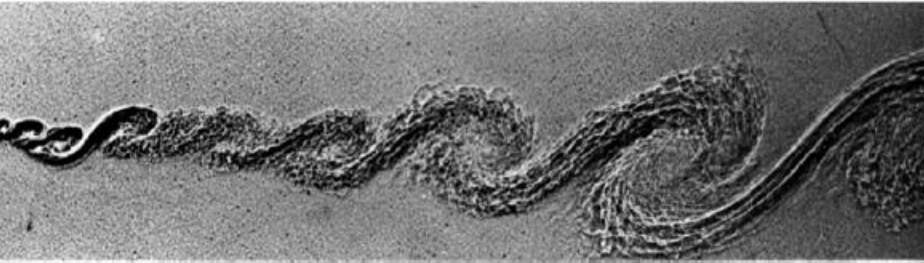
Развитие пульсаций



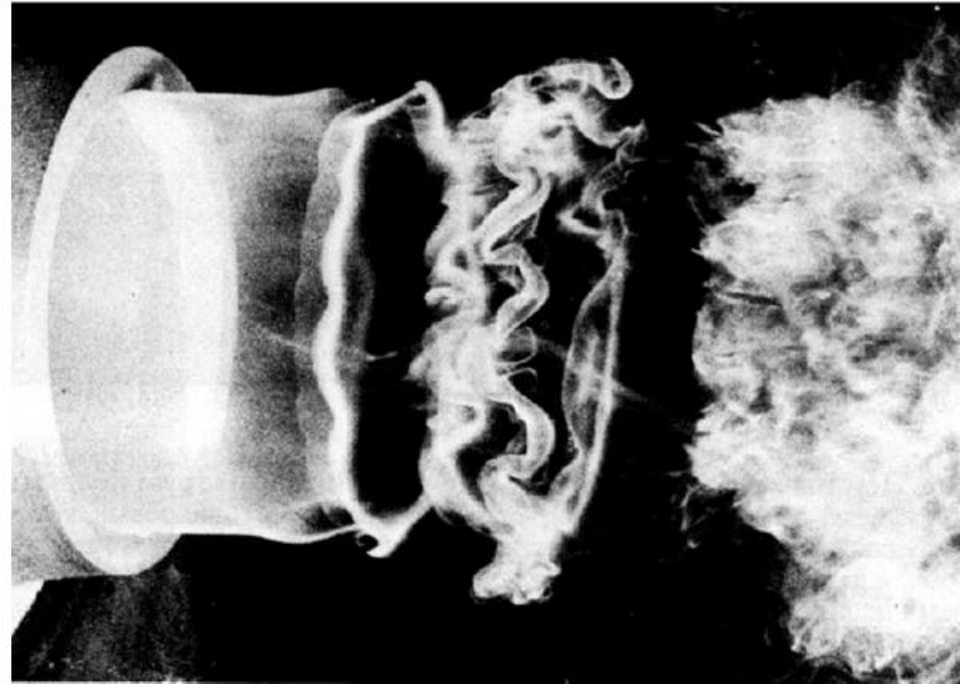
Переход к развитому турбулентному режиму течения



# Сценарий возникновения турбулентности в свободных течениях



Турбулизация слоя смешения



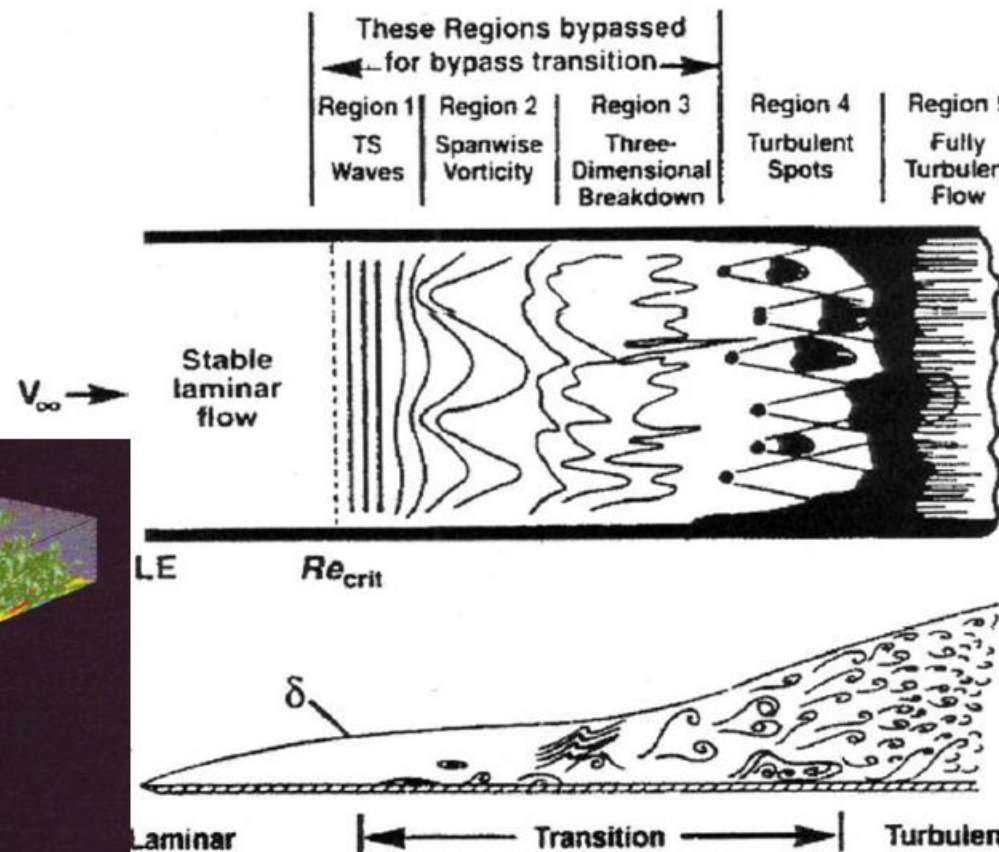
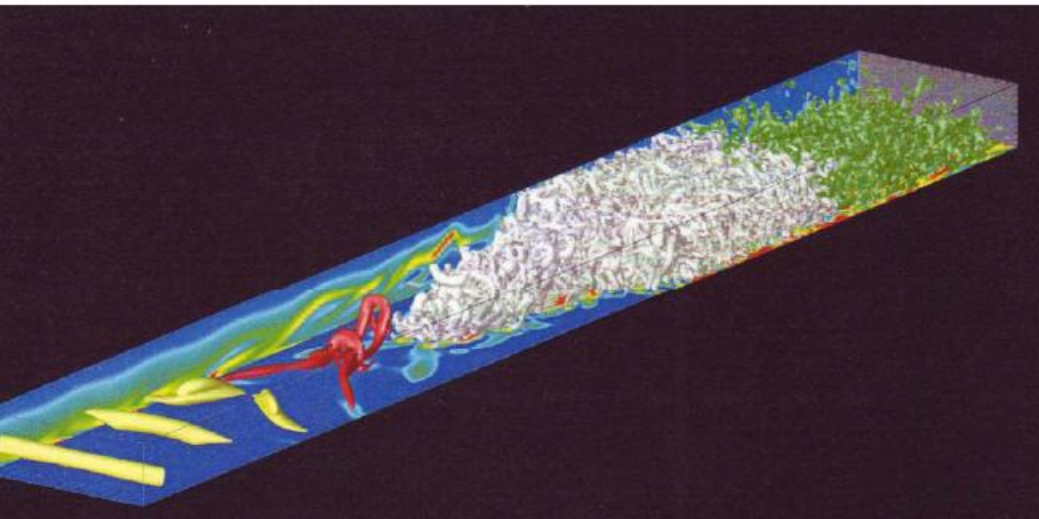
Турбулизация круглой струи

Появление систем упорядоченных движений, которые на определенном этапе турбулизуются

# Сценарий естественного перехода в пограничном слое

Потеря устойчивости, появление волн Толлмина-Шлихтинга  
 Появление двумерных вихрей  
 Развал на трехмерные структуры  
 Появление турбулентных пятен  
 Полностью турбулентное течение

Отсутствует при байпасном переходе



The natural transition process (from Schlichting, 1979)

## Резюме

- Причиной возникновения турбулентности в потоке является неустойчивость течения
- Чем выше число Рейнольдса, тем менее устойчиво течение и тем более вероятен переход к турбулентности
- Переход – сложное явление, он не происходит моментально и растянут в пространстве
- Дополнительные возмущения потока (шероховатость стенок, акустические возмущения, возмущения в набегающем потоке) ускоряют и интенсифицируют переход
- Для практических задач наиболее важен переход в пограничном слое, который бывает естественным, вынужденным и с образованием ламинарного отрывного пузыря



# Статистическая теория турбулентности

Поскольку пульсации газодинамических величин в турбулентном потоке являются случайными величинами, одним из подходов к изучению турбулентности является метод математической статистики

В рамках статистической теории турбулентности мгновенное поле течения делится на **осредненное** и **пульсационное**

$$u = \bar{u} + u'$$

Определение осредненного движения зависит от выбранного **способа осреднения**:

- по ансамблю
- по времени
- по пространству
- по фазе

**Наиболее корректным (но трудно реализуемым) является осреднение по ансамблю (по реализациям)**

- Обычно используют другие способы осреднения

# Осреднение по времени (по Рейнольдсу)

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} a(\tau) \cdot d\tau$$

Для удовлетворения условиям Рейнольдса период осреднения должен быть много больше максимального периода турбулентных пульсаций – времени автокорреляции

- При рассмотрении стационарных (в среднем) течений время осреднения может быть сколь угодно большим ( $T = \infty$ )
- В нестационарном случае период осреднения должен быть много меньше характерных времен изменения нестационарных величин
  - ✓ В нестационарном случае не всегда возможно подобрать период  $T$  такой, чтобы выполнялись условия Рейнольдса

# Осреднение по пространству (фильтрация)

$$\overline{f}(r, t) = \int_D G(r - r', \overline{\Delta}) f(r', t) dr'^3$$

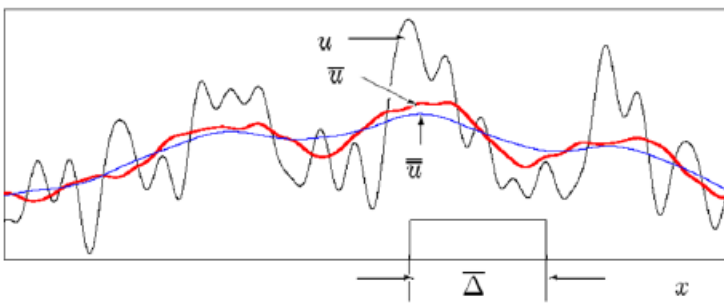
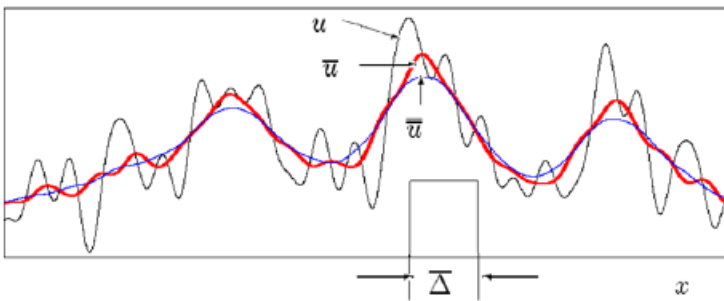
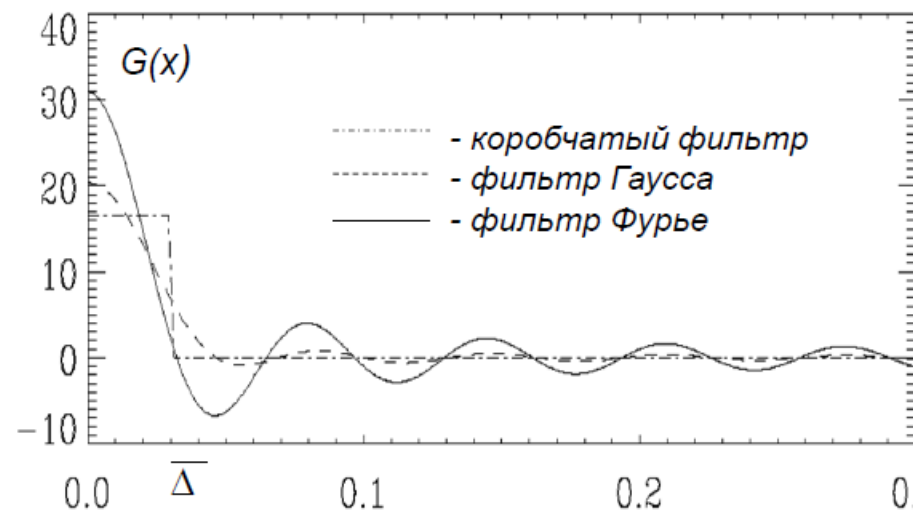
$D$  - область решения,

$G$  - функция фильтра,

$\Delta$  - ширина фильтра.

Условие нормировки  $\int_D G(r - r', \overline{\Delta}) dr'^3 = 1$

приводит к  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \overline{f}(r, t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_D G(r - r', \overline{\Delta}) f(r', t) dr'^3 = \int_D \delta(r - r') f(r', t) dr'^3 \equiv f(r, t)$



Для фильтрации  $\overline{\overline{u}} \neq \overline{u}$ ,  $\overline{u'} \neq 0$ ,  $\overline{u'v} \neq \overline{u'}\overline{v}$

Процедура фильтрации не удовлетворяет условиям Рейнольдса



# Корреляции и корреляционные коэффициенты

При выбранном способе осреднения можно определить

- корреляции (статические моменты)  $\overline{u'_i u'_j}$
- корреляционные коэффициенты  $R_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\sqrt{\overline{u'^2_i}} \sqrt{\overline{u'^2_j}}}$

Применение процедуры осреднения к уравнениям Навье-Стокса позволяет получить систему уравнений для осредненных характеристик вида  $\overline{u_i}$ .

- RANS - уравнения Рейнольдса (осреднение по времени)
- LES - отфильтрованные уравнения Навье-Стокса (фильтрация)

К сожалению, эти системы уравнений не замкнуты

- Необходимо построение замыкающих соотношений
  - Полуэмпирические модели турбулентности

# Интегральные масштабы турбулентности

Можно определить двухточечные корреляционные коэффициенты. Точки могут быть разнесены

в пространстве

$$R_{ij}^x(\Delta x) = \frac{\overline{u'_i(x)u'_j(x + \Delta x)}}{\sqrt{\overline{u'^2_i(x)}}\sqrt{\overline{u'^2_j(x + \Delta x)}}}$$

по времени

$$R_{ij}^t(\Delta t) = \frac{\overline{u'_i(t)u'_j(t + \Delta t)}}{\sqrt{\overline{u'^2_i(t)}}\sqrt{\overline{u'^2_j(t + \Delta t)}}}$$

На их основе можно определить интегральные масштабы турбулентности

$$\Lambda = \int_0^{\infty} R_{ij}^x(dx)dx \qquad T = \int_0^{\infty} R_{ij}^t(dt)dt$$

Такие масштабы используются в теории однородной изотропной турбулентности. При моделировании турбулентности эти масштабы не используются из-за сложности их вычисления

# Кинетическая энергия турбулентности

Одной из наиболее важных характеристик является

**кинетическая энергия турбулентности**  $K_t = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$

Инвариантна (не зависит от выбора системы координат)

- Является инвариантом тензора вторых одноточечных моментов

➤ тензор Рейнольдсовых напряжений  $\overline{u'_i u'_j}$

Большинство полуэмпирических моделей турбулентности содержат уравнения для определения кинетической энергии турбулентности



# Одномерный энергетический спектр

- Пульсации в точке можно разложить в ряд Фурье

$$u'(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(2\pi f_k t) + b_k \cdot \sin(2\pi f_k t)]$$

где  $T=t_1-t_2$  – используемый временной промежуток,  
 $f_k=k/T$  – адресуемый набор частот.

- Коэффициенты ряда Фурье определяются как

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u'(\tau) \cdot \cos(2\pi f_k \cdot \tau) \cdot d\tau, \quad b_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u'(\tau) \cdot \sin(2\pi f_k \cdot \tau) \cdot d\tau$$

- Амплитуда  $B_k = B(f_k) = 2\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  неудобна при рассмотрении сплошных спектров.

➤ Зависит от используемого временного промежутка  $T$

- Более удобной величиной является спектральная плотность (одномерный энергетический спектр)  $E_1(f_k) = \frac{T}{2} (B(f_k))^2$

➤ Интеграл равен дисперсии (среднему квадрату  $\overline{u'^2} = \int_0^{\infty} E_1(f) \cdot df$  пульсаций - удвоенной кинетической энергии)

➤ Можно определить энергию, приходящуюся на интервал частот  $[f_1, f_2]$   $E[f_1, f_2] = \frac{1}{2} \int_{f_1}^{f_2} E_1(f) \cdot df$

# Трехмерный энергетический спектр

Аналогично можно определить пространственный одномерный спектр

$$u'(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(2\pi\lambda_k x) + b_k \cdot \sin(2\pi\lambda_k x)], \quad L = x_2 - x_1, \quad \lambda_k = \frac{k}{L} \quad - \text{волновое число}$$

$$E_1(f_k) = \frac{T}{2} \left( 2\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right)^2 \quad \overline{u'^2} = \int_0^{\infty} E_1(\lambda) \cdot d\lambda \quad E[\lambda_1, \lambda_2] = \frac{1}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_1(\lambda) \cdot d\lambda$$

На практике обычно используют пространственный  
**трехмерный энергетический спектр**  $E(k)$ ,  $k$  – волновое число

Для его вычисления необходимо трехмерное преобразование Фурье

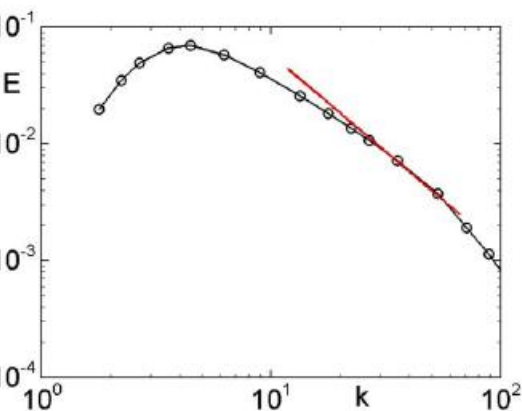
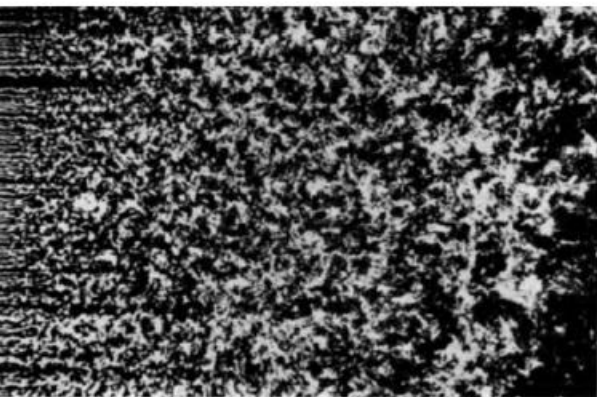
Интеграл равен кинетической энергии турбулентности  $K_t = \int_0^{\infty} E(k) \cdot dk$

Можно определить долю энергии турбулентных вихрей заданного

размера  $[l_1, l_2]$   $K_t[l_1, l_2] = \int_{k_2}^{k_1} E(k) \cdot dk, \quad k_1 = \frac{1}{l_1}, \quad k_2 = \frac{1}{l_2}$

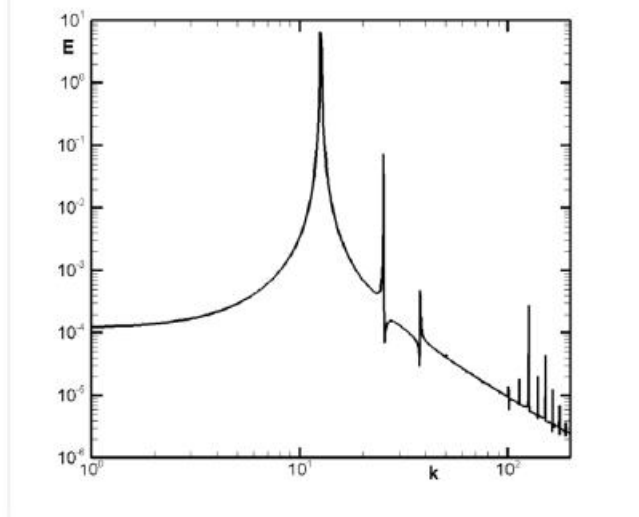
# Типы энергетических спектров

Сплошной



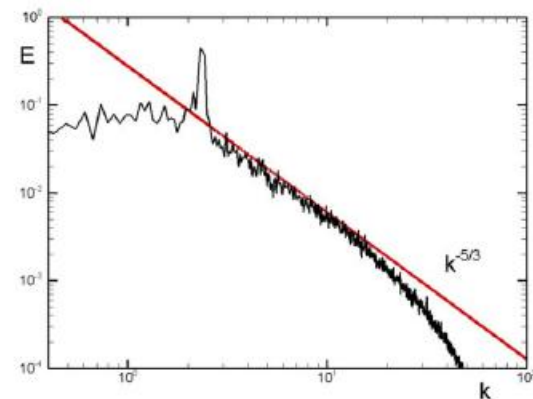
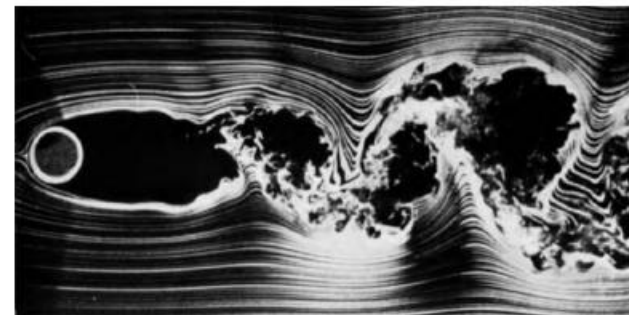
вырождение  
однородной  
изотропной  
турбулентности

Линейчатый



ламинарное  
обтекание  
цилиндра

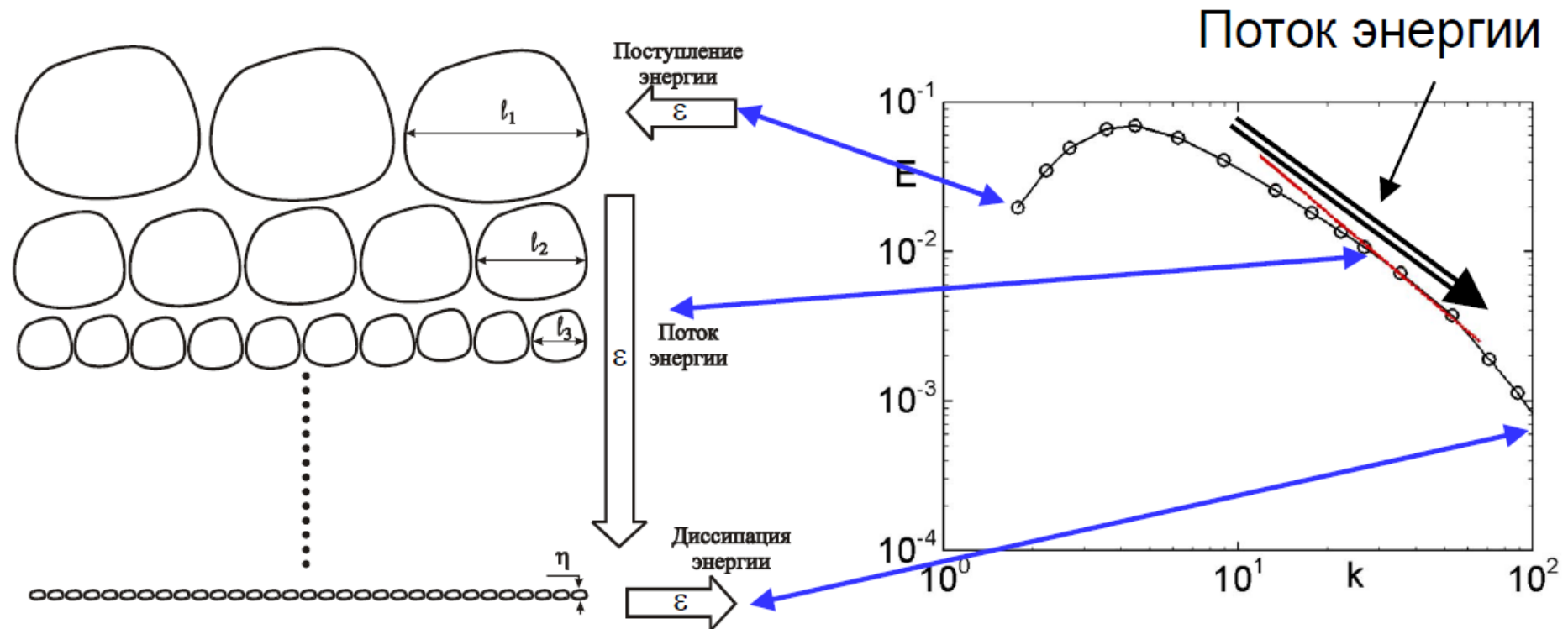
Смешанный



турбулентное  
обтекание  
цилиндра



# Каскадный перенос энергии



- Энергия поступает от осредненного потока к наиболее крупным вихрям
- Последовательно передается все более и более мелким вихрям (“каскадный перенос”)
- Наиболее мелкие (колмогоровские) вихри диссипируют и передают энергию тепловому движению

# Однородная изотропная турбулентность. Теория А.Н.Колмогорова (К-41)

Первая гипотеза Колмогорова. Статистические свойства турбулентности в инерционном и диссипативном интервале определяются тремя параметрами: скоростью диссипации энергии  $\varepsilon$ , кинематической вязкостью  $\nu$  и масштабом  $l$ .

Вторая гипотеза Колмогорова. Статистические свойства турбулентности в инерционном интервале определяются только двумя параметрами: скоростью диссипации энергии  $\varepsilon$  и масштабом  $l$ .

Структурные функции  $S_q(l) = \langle \delta w_l^q \rangle$ ;  $\delta w_l = \left\{ \vec{w}(\vec{r} + \vec{l}) - \vec{w}(\vec{r}) \right\} \cdot \vec{l} / |\vec{l}|$

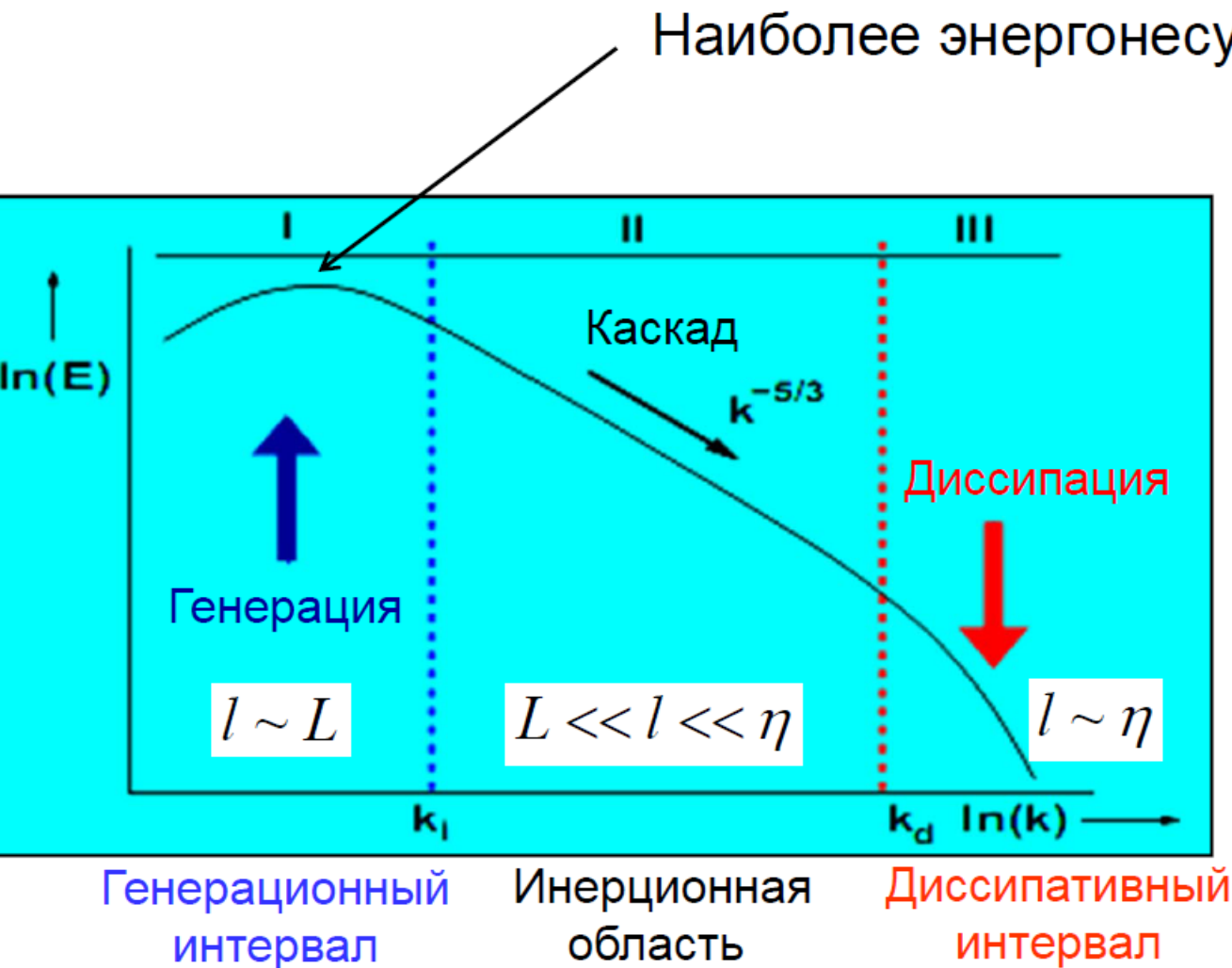
Следствие  $\delta w_l = \psi(\varepsilon, l)$ ;  $S_q(l) = f(\varepsilon, l)$

Из теории размерности следует

$$\delta w_l \propto (\varepsilon \cdot l)^{1/3}; \quad S_q(l) \propto (\varepsilon \cdot l)^{q/3}; \quad E(k) = C \cdot \varepsilon^{2/3} \cdot k^{-5/3}$$

Колмогоровский масштаб  $\eta \propto (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$

# Области энергетического спектра



$$\eta = 1 / k_D = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$$

$\eta$  - масштаб Колмогорова

$\varepsilon$  - скорость диссипации энергии

$L$  - характерный размер задачи



# Резюме

- Турбулентность – сложное явление и для его описания используются различные подходы
- Турбулентность можно рассматривать как совокупность вихрей различного размера, от колмогоровского масштаба до когерентных структур
- Все переменные в турбулентном потоке можно разделить на осредненную и пульсационную составляющие
- Турбулентные пульсации как случайные величины рассматриваются в рамках статистической теории турбулентности, дисперсия характеризует их интенсивность
- Энергетический спектр характеризует распределение энергии по волновым числам
- Процесс передачи энергии от крупных вихрей к мелким играет фундаментальную роль и называется каскадный перенос энергии